

Topologia, Matematyka Finansowa, 30.11.2009

Zad 1. Niech $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\} \cup \{\mathbf{O}\}$, gdzie $\mathbf{O} = (0, 0)$. Udowodnić, że funkcja

$$d(x, y) = \begin{cases} d_e(x, y), & x_2 \cdot y_2 \geq 0, \\ d_e(x, \mathbf{O}) + d_e(y, \mathbf{O}), & x_2 \cdot y_2 < 0, \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$ oraz $y = (y_1, y_2)$, jest metryką na X . Wyznaczyć i narysować $K((1, 1); \sqrt{2})$ oraz $K((0, 1); \sqrt{2})$.

Zad 2. Zbadać zbieżność ciągu $a_n = (\frac{n+1}{n}, \frac{2n+2}{n})$ punktów płaszczyzny w metryce euklidesowej, rzeka oraz studnia.

Zad 3. Zbadać zbieżność ciągu funkcji $x_n(t) = t^n$ w przestrzeniach $C[0, 1]$ oraz $C[0, \frac{1}{2}]$.

Zad 4. Wyznaczyć w topologii euklidesowej \bar{A} , A° , ∂A oraz A^d zbioru

$$A = \bigcup_{a \geq 1} \{(x, y) : y = ax\} \cup \{(1, 0)\}.$$

Zad 5. Pokazać, że zbiór $X = \mathbb{R}$ wraz z rodziną

$$\tau = \{U \subset X : x \in U \implies -x \in U\}$$

stanowi przestrzeń topologiczną. Wyznaczyć wszystkie otwarte jednoelementowe podzbiory tej przestrzeni. Czy topologia τ pochodzi od metryki?

Topologia, Matematyka Finansowa, 30.11.2009

Zad 6. Niech $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\} \cup \{\mathbf{O}\}$, gdzie $\mathbf{O} = (0, 0)$. Udowodnić, że funkcja

$$d(x, y) = \begin{cases} d_e(x, y), & x_2 \cdot y_2 \geq 0, \\ d_e(x, \mathbf{O}) + d_e(y, \mathbf{O}), & x_2 \cdot y_2 < 0, \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$ oraz $y = (y_1, y_2)$, jest metryką na X . Wyznaczyć i narysować $K((1, 1); \sqrt{2})$ oraz $K((0, 1); \sqrt{2})$.

Zad 7. Zbadać zbieżność ciągu $a_n = (\frac{n+1}{n}, \frac{2n+2}{n})$ punktów płaszczyzny w metryce euklidesowej, rzeka oraz studnia.

Zad 8. Zbadać zbieżność ciągu funkcji $x_n(t) = t^n$ w przestrzeniach $C[0, 1]$ oraz $C[0, \frac{1}{2}]$.

Zad 9. Wyznaczyć w topologii euklidesowej \bar{A} , A° , ∂A oraz A^d zbioru

$$A = \bigcup_{a \geq 1} \{(x, y) : y = ax\} \cup \{(1, 0)\}.$$

Zad 10. Pokazać, że zbiór $X = \mathbb{R}$ wraz z rodziną

$$\tau = \{U \subset X : x \in U \implies -x \in U\}$$

stanowi przestrzeń topologiczną. Wyznaczyć wszystkie otwarte jednoelementowe podzbiory tej przestrzeni. Czy topologia τ pochodzi od metryki?